

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי ב

פרק 25 - בעיות מינימום ומקסימום כלכליות

תוכן העניינים

1. כללי 1

בעיות מינימום ומקסימום כלכליות

שאלות

(1) כאשר חברת "יוטבתה" מוכרת x ליטר שוקו ליום היא יכולה לקבל מחיר של: $p(x) = -\frac{1}{4}x + 10$ שקל לליטר.

- מהו מחיר ליטר אחד אם הכמות שנמכרת ביום היא 4 ליטר?
- מהו מחיר ליטר אחד אם הכמות שנמכרת ביום היא 12 ליטר?
- מהי הכמות הנמכרת ביום אם המחיר הוא 6 ₪ לליטר?
- שרטט את הגרף של פונקציית הביקוש ומצא את תחום ההגדרה שלה.
- פונקציית הביקוש הנתונה מתארת את מחיר המוצר כפונקציה של הכמות הנמכרת ממנו. שנה את נוסחת הפונקציה כך שהיא תתאר את הכמות הנמכרת מהמוצר כפונקציה של מחירו.

(2) פונקציית הביקוש של מוצר מסוים היא: $p(x) = -0.6x + 120$.

- מצא את פונקציית הפדיון ואת התחום שלה.
- אם $x = 20$ מהו מחיר המוצר ומהו הפדיון?
- אם המחיר הוא 12 ₪, מהו הפדיון?

(3) פונקציית הפדיון של מוצר מסוים היא: $R(x) = -0.08x^2 + 40x$.

- מהו התחום של פונקציית הפדיון?
- שרטט את הגרף של פונקציית הפדיון.
- מצא את פונקציית הביקוש ושרטט את הגרף שלה.

(4) פונקציית הביקוש של מוצר מסוים היא: $p(x) = -0.4x + 100$ שקל ליחידה.

- מצא את תחום הפונקציה.
- מצא את פונקציית הפדיון ואת פונקציית הפדיון הממוצע.
- מצא את פונקציית הפדיון השולי.
- לאיזה ערך של x יתקבל פדיון מקסימלי ומהו?

(5) פונקציית הביקוש של מוצר מסוים היא: $p(x) = -6x^2 + 240x + 1,800$.

- מצא את פונקציית הפדיון ואת פונקציית הפדיון השולי.
- אם $x = 40$ האם כדאי להגדיל את הייצור?
- מתי יהיה הפדיון מקסימלי ומהו?

6) פונקציית הביקוש למוצר מסוים נתונה ע"י: $Q(x) = 10x - \frac{x^2}{5}$.

- מצא את המחיר הנותן את הפדיון המקסימלי.
- מהו הביקוש במקרה זה?
- מהו הביקוש השולי בנקודת המחיר שמצאת? מה משמעותו?

7) פונקציית ההוצאות של יצרן המייצר x ק"ג קפה ביום היא: $C(x) = 5x + 150$.

- שרטט גרף של פונקציית ההוצאות. מהן ההוצאות הקבועות?
- מצא כמה ק"ג קפה מייצר היצרן אם ההוצאות הם 1,000 ₪.
- מהן ההוצאות אם מייצרים 20 ק"ג קפה?
- מצא את פונקציית ההוצאה השולית.

8) פונקציית העלות של יצרן כובעים היא: $TC(x) = 0.04x^2 + 10x + 400$ שקל ליום.

- חשב את העלות הממוצעת ליום אם הוא מייצר 40 כובעים.
- כמה כובעים עליו לייצר כדי שהעלות הממוצעת תהיה מינימלית?
- חשב את העלות השולית ליום עבור $x = 100$. איזו מסקנה ניתן להסיק?

9) פונקציית העלות של מוצר מסוים היא: $C(x) = 0.004x^2 + 10x + 200$.

- חשב את העלות כאשר $x = 100$ וכאשר $x = 101$.
- חשב את העלות השולית כאשר $x = 100$.
- חשב כמה תעלה יחידת מוצר נוספת כאשר היצור יעבור מ- $x = 100$ ל- $x = 101$ והשווה עם התוצאה של סעיף ב. מהי המסקנה?
- מצא האם קצב השינוי של העלות גדל או קטן?

10) ליצרן פונקציית ביקוש: $P(Q) = 100 - 0.06Q$,

ופונקציית עלות כוללת: $TC(Q) = 200 + 4Q$.

- מהי הכמות Q שעל היצרן לייצר על מנת להביא למקסימום את רווחיו?
מהו המקסימום במקרה זה?

11) ליצרן פונקציית ביקוש: $P(Q) = 20$ ופונקציית עלות: $TC(Q) = 300 + 2Q^2$.

- מהי הכמות שעל היצרן לייצר על מנת להביא למקסימום את רווחיו?
מהו המקסימום במקרה זה?

12) ליצרן פונקציית ביקוש: $P(Q) = -0.15Q + 50$,

ופונקציית עלות שולית: $MC(Q) = 0.06Q^2 + 20$.

- מהי הכמות שעל היצרן לייצר על מנת להביא למקסימום את רווחיו?

$$(13) \text{ ליצרן פונקציית ביקוש: } Q = \frac{5,000 - 50P}{3}$$

$$\text{ופונקציית עלות: } TC(Q) = 200 + 4Q$$

מהי הכמות Q שעל היצרן לייצר על מנת להביא למקסימום את רווחיו?
מהו המקסימום במקרה זה?

$$(14) \text{ ליצרן פונקציית עלות שולית: } MC(Q) = 0.06Q^2 + 20$$

מצא את פונקציית העלות אם ידוע שכאשר הכמות המיוצרת היא $Q = 10$
אז העלות הכוללת היא 225 ₪.

(15) ענה על הסעיפים הבאים:

א. הוכח שהרווח המקסימלי מתקבל כאשר הפדיון השולי שווה להוצאה השולית. הסבר את המשמעות הגרפית.

ב. הוכח שאם מחיר המוצר קבוע אז הרווח המקסימלי מתקבל כאשר ההוצאה השולית שווה למחיר המוצר.

(16) יעל נוהגת לעשות שופינג בכל יום בכיכר המדינה. לאחרונה החליטה יעל לשכור דירה לחודש (30 יום). אם הדירה נמצאת במרחק x ק"מ מכיכר

המדינה דמי השכירות החודשיים הינם: $P(x) = 60 - 4x$.
בכל יום יעל נוסעת הלוך ושוב לכיכר המדינה.

$$\text{הוצאות הנסיעה לק"מ אחד נתונות על ידי: } D(x) = \frac{x^2}{180} + \frac{2}{3x}$$

א. רשום את ההוצאה הכוללת של יעל, $TC(x)$.

ב. באיזה מרחק מכיכר המדינה על יעל לשכור את דירתה?

ג. שרטט גרף איכותי של $TC(x)$. הדגש את שיעורי נקודת הקיצון.

תשובות סופיות

- (1) א. 9 ₪ ב. 7 ₪ ג. $x=16$ ד. ראה סרטון.
- (2) א. $x \geq 0, R(x) = -0.6x^2 + 120x$ ב. 2,160 ₪ ג. $x=180$
- (3) א. $x \geq 0$ ב. ראה סרטון. ג. $p(x) = \frac{R(x)}{x} = -0.08x + 40$
- (4) א. $x \geq 0$ ב. $x > 0, R(x) = -0.04x^2 + 100x, AR(x) = -0.4x + 100$ ג. $R_{\max} = 62,500, x = 1,250$
- (5) א. $R(x) = -6x^3 + 240x^2 + 1,800x, R'(x) = -18x^2 + 480x + 1,800$ ב. לא כדאי להגדיל את הייצור. ג. $R_{\max} = 108,000$
- (6) א. $x = 33\frac{1}{3}$ ב. $Q\left(33\frac{1}{3}\right) = 10 \cdot 33\frac{1}{3} - \frac{33\frac{1}{3}^2}{5}$ ג. $Q'\left(33\frac{1}{3}\right) = -3\frac{1}{3}$
- (7) א. $C(0) = 150$ ב. $x = 170$ ג. $C(20) = 250$ ד. $MC(x) = 5$
- (8) א. $AC(40) = 21.6$ ב. $x = 100$ ג. $TC'(100) = 18$
- (9) א. $C(100) = 1,240, C(101) = 1,250.804$ ב. $C'(100) = 10.8$ ג. 10.804 ₪ ד. $C'(x) = 0.008 > 0$, גדל.
- (10) $\pi_{\max} = 38,200, Q = 800$
- (11) $\pi_{\max} = -250, Q = 5$
- (12) $Q = 25$
- (13) $\pi_{\max} = 38,200, Q = 800$
- (14) $TC(Q) = 0.02Q^3 + 20Q + 5$
- (15) א. הוכחה. ב. הוכחה.
- (16) א. $TC(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x + 100, x > 0$ ב. יעל תעדיף לשכור בכיכר המדינה. ג. ראה סרטון.